Universidad Andrés Bello

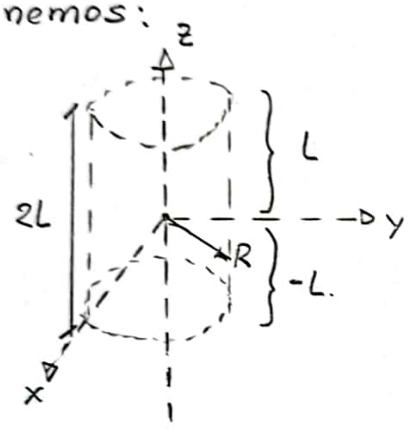
Solemne 3 - 2011

P.1| Considere un cilindro de radio R y altura 2L centrado en el origen en $\mathbb{R}^3$. La temperatura en la parte superior e inferior del cilindro es igual a 0, mientras que en la parte curva de la frontera es igual a: $T(x,y,z) = T_0(L-|z|)$

Usando coordenadas cilindricas encuentre la temperatura en el cilindro.

solución:

Tenemos:



nota: Como las condiciones de borde en L y -L son un poco problematicas "para nosotros" :) . Vamos a trasladar al cilindro hacia arriba. Es decir, originalmente el cilindro empieza en -L y va hasta L, pero al moverlo iniciaría en 0 e iría hasta 2L. Pero para ello debemos modificar la funcion que modela la temperatura en la superficie curva del cilindro.

la funcion original es: $T(x,y,z) = T_0(L-|z|)$

la funcion modificada es: $T(x,y,z) = T_0(L-|z-L|)$

* Comprobación:

⇒ Para la parte inferior del cilindro:

original: $z = -L$

$T(x,y,-L) = T_0(L-|-L|)$
$= T_0(L-L)$
$= 0$

modificado: $z = 0$

$T(x,y,0) = T_0(L-|0-L|)$
$= T_0(L-|-L|)$
$= T_0(L-L)$
$= 0.$

Coinciden

⇒ Para la parte superior del cilindro:

original: $z = L$

$T(x,y,L) = T_0(L-|L|)$
$= T_0(L-L)$
$= 0.$

modificado: $z = 2L.$

$T(x,y,2L) = T_0(L-|2L-L|)$
$= T_0(L-|L|)$
$= T_0(L-L) = 0$

Coinciden

Escaneado con CamScanner

2)

→ Para la mitad (parte central) del cilindro.

original: $z=0$

$T(x,y,0) = T_0(L-|0|)$

$= T_0 L$

modificado: $z=L$.

$T(x,y,L) = T_0(L-|L-L|)$

$= T_0(L-|0|)$

$= T_0 L$

Coinciden

Como se puede ver, la modificación, puede modelar adecuadamente el comportamiento de la función original.

Entonces, usando la modificación, seguiremos con la solución.

→ Debido a la geometría del problema se utilizaran coordenadas cilíndricas.

→ Como no se mencionan condiciones iniciales o de borde que involucren al angulo, se asumira que es independiente de éste.

→ Como no se mencionan condiciones iniciales para el tiempo se asumira un regimen estacionario.

$$\Rightarrow \quad \frac{dT(x,y,z)}{dt} = 0.$$

Por lo cual, la ecuación a resolver es la siguiente:

$$\Delta T(r,z) = 0 \quad \dots (1)$$

usando separación de variable, podemos asumir que:

$$T(r,z) = R(r)\,Z(z)$$

reemplazamos en (1):

$$\frac{\partial^2[RZ]}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial[RZ]}{\partial r} + \frac{\partial^2[RZ]}{\partial z^2} = 0.$$

$$Z\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r}Z\frac{\partial R}{\partial r} + R\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = 0.$$

simplificamos la notación:

$$ZR'' + \frac{1}{r}ZR' + RZ'' = 0$$

Dividimos entre RZ:

$$\frac{ZR''}{RZ} + \frac{1}{r}\frac{ZR'}{RZ} + \frac{RZ''}{RZ} = 0.$$

Escaneado con CamScanner

Universidad Andrés Bello

$$\frac{R''}{R} + \frac{1}{r}\frac{R'}{R} + \frac{Z''}{Z} = 0 \quad \cdots (2)$$

Escogemos la constante de separacion $-\lambda^2$ para.

$$\frac{Z''}{Z} = -\lambda^2$$

la solucion de la ecuacion anterior es:

$$Z_\lambda(z) = A_\lambda \cos(\lambda z) + B_\lambda \operatorname{sen}(\lambda z)$$

Aplicando la condicion de borde. $T(r,0) = 0$.

$$\Rightarrow Z_\lambda(0) = A_\lambda \cos[\lambda(0)] + B_\lambda \operatorname{sen}[\lambda(0)] = 0$$

$$A_\lambda [1] + B_\lambda [0] = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{A_\lambda = 0}$$

la funcion Z_λ va quedando: $Z_\lambda(z) = B_\lambda \operatorname{sen}(\lambda z)$

Aplicando la condición de borde: $T(r, 2L) = 0$

$$\Rightarrow Z_\lambda(2L) = B_\lambda \operatorname{sen}[\lambda 2L] = 0$$

$$\operatorname{sen}[2L\lambda] = 0 \text{ ; asumiendo } B_\alpha \neq 0.$$

$$2L\lambda = n\pi$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{n\pi}{2L}}$$

Entonces, Z_α queda como: $Z_\lambda = B_\lambda \operatorname{sen}(\lambda z)$

$$\boxed{Z_n = B_n \operatorname{sen}\left[\frac{n\pi}{2L} z\right]}$$

Ahora, regresamos a (2) y reemplazemos Z''/Z por $-\lambda^2$

Escaneado con CamScanner

4)

$$\frac{R''}{R} + \frac{1}{r}\frac{R'}{R} - \lambda^2 = 0$$

multiplicamos por r^2:

$$r^2\frac{R''}{R} + r\frac{R'}{R} - r^2\lambda^2 = 0$$

multiplicamos por R:

$$r^2R'' + rR' - \lambda^2 r^2 R = 0 \quad \dots (*)$$

Recordando la ecuación generalizada de Bessel:

$$r^2U'' + (1-2\alpha)rU' + (\beta^2\gamma^2r^{2\gamma} + \alpha^2 - \nu^2\gamma^2)U = 0 \quad \dots (**)$$

cuya solución es:

$$U(r) = r^{\alpha}\left\{A_1 J_{\nu}(\beta r^{\gamma}) + A_2 Y_{\nu}(\beta r^{\gamma})\right\}$$

Comparando $(*)$ y $(**)$, obtenemos:

$\alpha = 0$; $\gamma = 1$; $\beta = i\lambda \Rightarrow \beta^2 = -\lambda^2$; $\nu = 0$.

Entonces, la solución de $(*)$ sería:

$$R(r) = A_1 J_0(i\lambda r) + A_2 Y_0(i\lambda r)$$

Recordando que: $Y_{\nu}(r) = \dfrac{\cos \pi\nu\, J_{\nu}(r) - J_{-\nu}(r)}{\operatorname{sen}(\pi\nu)}$

en nuestro caso: $Y_0(r) = \dfrac{\cos(\pi(0))\, J_0(r) - J_0(r)}{\operatorname{sen}(\pi(0))}$

Vemos que diverge, debido a que el denominador es cero. Por lo cual debemos asumir $\boxed{A_2 = 0}$ para evitar dicha divergencia.

Entonces la solucion sería:

$$R(r) = A_1 J_0(i\lambda r)$$

Ahora, podemos escribir la solucion general como:

$$T(r,z) = \sum A_1 J_0(i\lambda r)\, B_n \operatorname{sen}\left[\frac{n\pi}{2L} z\right]$$

Escaneado con CamScanner

Universidad Andrés Bello

Podemos unir las constantes: A_1 y B_n. y convenir en llamarla A_n, entonces la solución quedaría como:

$$T(r,z) = \sum A_n J_0(i\lambda r) \operatorname{sen}\left[\frac{n\pi}{2L} z\right]$$

Aplicando, la condicion de borde: $T(R,z) = T_0(L - |z-L|)$

$$T(R,z) = \sum A_n J_0(i\lambda R) \operatorname{sen}\left[\frac{n\pi}{2L} z\right] = T_0(L - |z-L|)$$

luego:

$$L - |z-L| = \sum D_n \operatorname{sen}\left[\frac{n\pi}{2L} z\right]$$

donde: $$D_n = \frac{A_n J_0(i\lambda R)}{T_0} \quad \ldots (3)$$

usando la expansion en terminos de autofunciones:

$$f(z) = \sum a_n g_n(z).$$

donde: $f(z) \equiv L - |z-L|$ y $a_n = D_n$ y $g_n(z) = \operatorname{sen}\left[\frac{n\pi}{2L} z\right]$

Tenemos:

$$a_n = \frac{\int_a^b f \bar{g}_n \, dz}{\int_a^b \bar{g}_n g_n \, dz}.$$

en nuestro caso: $\bar{g}_n = g_n$; $\bar{g}_n$ es la conjugada de la funcion g_n y los limites de integracion son: $a = 0$ y $b = 2L$.

Entonces, aplicando esto tenemos:

$$D_n = \frac{\int_0^{2L} (L - |z-L|) \operatorname{sen}\left[\frac{n\pi}{2L} z\right] dz}{\int_0^{2L} \operatorname{sen}^2\left[\frac{n\pi}{2L} z\right] dz} \quad \ldots (4)$$

Escaneado con CamScanner

Conociendo D_n a partir de (4), podemos despejar A_n en (3).

$$A_n = \frac{D_n T_0}{J_0(i\lambda R)} \quad \ldots (5)$$

Conociendo A_n a partir de (5), podemos escribir la solucion general como:

$$T(r,z) = A_n \cdot J_0(i\lambda r) \operatorname{sen}\left[\frac{n\pi}{2L} z\right]$$

Escaneado con CamScanner